第 54 卷 第 4 期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 54 No. 4
2015 年 7 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Jul. 2015

DOI:10. 13471/j. cnki. acta. snus. 2015. 04. 012

关于图的控制数的新上界*

徐保根，李春华，范自柱
（华东交通大学数学系，江西 南昌 330013）

摘 要：设 $G = (V,E)$ 是一个图，$D \subseteq V$，如果对任意点 $v \in V - D$，存在 $u \in D$ 使得 $uv \in E$，则称 D 为图 G 的一个控制集，图 G 的最小控制集的容量称为控制数。通过选点控制的方法，获得了关于控制数的一些重要结论，给出了图的控制数的若干新上界，并推广了一些已知的结果。

关键词：图；控制集；控制数；上界

中图分类号：O157. 5 **文献标志码**：A **文章编号**：0529 - 6579（2015）04 - 0069 - 03

On Some New Upper Bounds of Domination Numbers in Graphs

XU Baogen, *LI Chunhua*, *FAN Zhizhu*
(Department of Mathematics, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Let $G = (V,E)$ be a graph, a subset $D \subseteq V$ is said to be a dominating set of G if $\forall v \in V - D$, there exists $u \in V$ such that $uv \in E$. The domination number of G is defined as the minimum value of $|D|$ taken over all dominating set D of G. By the method of choosing vertex domination, some important results on domination number of a graph are obtained, some new upper bounds of domination numbers in graphs are given, and some known results are generalized.

Key words: graph; dominating set; domination number; upper bound

本文中所指的图均为无向简单图，文中未说明的符号和术语同于文献 [1 - 2]。

设 $G = (V,E)$ 为一个图，对 $u \in V$，$N_G(u)$ 和 $N_G[u]$ 分别表示 u 点在 G 中的（开）邻域和闭邻域，$d_G(u) = |N_G(u)|$ 表示 u 点在 G 中度，$\Delta = \Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 分别表示图 G 的最大度和最小度，$N_G(u)$ 、$N_G[u]$ 和 $d_G(u)$ 在不会引起混淆时可分别简记为 $N(u)$ 、$N[u]$ 和 $d(u)$。若 $S \subseteq V(G)$，记 $N[S] = \bigcup_{v \in S} N[v]$。

对于 $S \subseteq V(G)$，$G[S]$ 为 S 在 G 中的导出子图。对于 $v \in V$，则记 $G - v = G[V(G) \setminus v]$；若 $S \subseteq V(G)$，则记 $G - S = G[V \setminus S]$；若 $S \subseteq T \subseteq V(G)$，则记 $T - S = T \setminus S$。

1 若干引理

近几年来，图的控制理论研究的内容越来越广泛，各类控制概念相继产生且研究成果不断丰富，Haynes 等人综述了图的控制理论研究方面的主要研究成果，尤其是在图的点控制方面，提出了多种控制概念[3 - 4]，但对于传统意义下的点控制问题，并未取得太大的进展。早在 1974 年 Arnautov 就给出了下面关于控制数的一个上界，后来 Alon 和 Spencer 在 1992 年利用概率统计的方法也证明了此上界。

引理 1[5] 对任意 n 阶图 G，$\delta = \delta(G)$ 表示 G 的最小度，则有

* **收稿日期**：2014 - 11 - 05
基金项目：国家自然科学基金资助项目（11361024，11261018，61263032）；江西省高校科技落地计划资助项目（KJLD12067）；江西省自然科学基金资助项目（20151BAB201002）；江西省教育厅科技资助项目（GJJ14381）
作者简介：徐保根（1963 年生），男；**研究方向**：图论及应用研究；E-mail：Baogenxu@163. com

$$\gamma(G) \leqslant \frac{n}{1+\delta}(1+\ln(1+\delta))$$

对于上述引理所给出的上界，当 $\delta = 0$ 时是平凡的。当 $\delta = 1$ 时是明显可改进的。事实上有下面的引理 2。

引理 2[2,4] 对任意 n 阶图 G，若 $\delta \geqslant 1$，则有 $\gamma(G) \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$。

在文献［4］中我们还刻划了使上式中等号成立的所有连通图。

近些年来，图的控制理论主要着重于研究图的边控制和特殊控制，文献［6］中综述了这一面的主要成果，许多新的控制参数不断提出，如符号圈控制[7]、K 符号边控制[8]和混合控制等[9]。这极大地丰富和完善了控制理论的内容。本文将通过选点控制的方法，得出控制数的一个新上界，这将对上述界限进行了很好的推广和改进，并由此产生许多关于控制数的新上界。

2 主要结论及其证明

定理 1 对任意 n 阶图 G 和非负整数 $k(0 \leqslant k \leqslant n-\delta-1)$，$\Delta$ 和 δ 分别表示图 G 的最大度和最小度，则有

$$\gamma(G) \leqslant k+1+n\left(1-\frac{1+\Delta}{n}\right)\left(1-\frac{1+\delta}{n-1}\right)\cdot \left(1-\frac{1+\delta}{n-2}\right)\cdots\left(1-\frac{1+\delta}{n-k}\right)$$

证明 选取 $v_1 \in V(G)$ 且 $d(v_1) = \Delta$，记

$$U_1 = V(G) - N[v_1]$$

可见 $|U_1| = n-\Delta-1$。在 $N[U_1] = \bigcup_{v \in U_1} N[v]$ 中至少有 $|U_1|(1+\delta)$ 个点（此并集中每个点均按其出现的次数计算），从而在 $N[U_1]$ 中至少有一个点 v_2 出现了不少于 $\frac{(n-\Delta-1)(1+\delta)}{n-1}$ 次，即 v_2 点控制 U_1 中的点数不少于 $\frac{(n-\Delta-1)(1+\delta)}{n-1}$。记

$$U_2 = V(G) - N[v_1] - N[v_2]$$

故有 $|U_2| \leqslant n-\Delta-1-\frac{(n-\Delta-1)(1+\delta)}{n-1} = n\left(1-\frac{1+\Delta}{n}\right)\left(1-\frac{1+\delta}{n-1}\right)$。

同样地，$N[U_2]$ 中至少有 $|U_2|(1+\delta)$ 个点，故在 $N[U_2]$ 中至少有一点 v_3 出现了不少于 $\frac{|U_2|(1+\delta)}{n-2}$ 次，即 v_3 控制了 U_2 中的点数不少于 $\frac{|U_2|(1+\delta)}{n-2}$，记 $U_3 = V(G) - N[v_1] - N[v_2] - N[v_3]$ 可见 $|U_3| \leqslant |U_2| - \frac{|U_2|(1+\delta)}{n-2} = |U_2|\left(1-\frac{1+\delta}{n-2}\right) \leqslant n\left(1-\frac{1+\Delta}{n}\right)\left(1-\frac{1+\delta}{n-1}\right)\left(1-\frac{1+\delta}{n-2}\right)$。

由此类推，经过 $k+1$ 次时有

$$U_{k+1} = V(G) - N[v_1] - N[v_2] - N[v_3] - \cdots - N[v_{k+1}]$$

且

$$|U_{k+1}| \leqslant n\left(1-\frac{1+\Delta}{n}\right)\left(1-\frac{1+\delta}{n-1}\right)\cdot \left(1-\frac{1+\delta}{n-2}\right)\cdots\left(1-\frac{1+\delta}{n-k}\right)$$

令 $S_{k+1} = \{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_{k+1}\}$，$D_{k+1} = S_{k+1} \cup U_{k+1}$，显然 D_{k+1} 为图 G 的一个控制集，故有

$$\gamma(G) \leqslant |D_{k+1}| = |S_{k+1}| + |U_{k+1}| \leqslant k+1+n\left(1-\frac{1+\Delta}{n}\right)\left(1-\frac{1+\delta}{n-1}\right)\cdot \left(1-\frac{1+\delta}{n-2}\right)\cdots\left(1-\frac{1+\delta}{n-k}\right)$$

至此定理 1 证毕。

特别地，分别取 $k = 0$ 和 $k = 1$ 时，可得下面的推论 1。

推论 1 设 G 为一个 n 阶图 $(n \geqslant 2)$，若 Δ 和 δ 分别表示其最大度和最小度，则有

（i）$\gamma(G) \leqslant n-\Delta$；

（ii）$\gamma(G) \leqslant n-(\Delta+\delta)+\left\lfloor \frac{\Delta(1+\delta)}{n-1} \right\rfloor$。

由上述定理 1 也可直接得出下面的推论 2。

推论 2 设 G 为一个 n 阶图 $(n \geqslant 2)$，若 Δ 和 δ 分别为其最大度和最小度，则对任意非负整数 k，均有

$$\gamma(G) \leqslant k+1+n\left(1-\frac{1+\Delta}{n}\right)\left(1-\frac{1+\delta}{n-1}\right)^k$$

推论 3 在上述推论 2 中，当 k 为任何非负实数时，结论均成立。

证明 因当实数 $k = 0$ 或者 $k \geqslant n$ 时，推论 3 显然成立。下设 $k \in (0,n)$。

令函数 $f(x) = x+1+n\left(1-\frac{1+\Delta}{n}\right)\left(1-\frac{1+\delta}{n-1}\right)^x$。考察函数 $f(x)$ 的单调性，因为其导数

$$f'(x) = 1+n\left(1-\frac{1+\Delta}{n}\right)\left(1-\frac{1+\delta}{n-1}\right)^x \ln\left(1-\frac{1+\delta}{n-1}\right)$$

可见 $f'(x) = 0$ 有唯一的正实数根 $x = x_0$。当 $0 \leqslant x \leqslant x_0$ 时 $f'(x) \geqslant 0$；当 $x \geqslant x_0$ 时 $f'(x) \leqslant 0$。即 $f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上递增，在 $[x_0,n]$ 上递减。从而当 $k \in (0,n)$ 时，有

$$\gamma(G) \leqslant \min\{f(0), f(n)\} \leqslant f(k) =$$

$$k+1+n\left(1-\frac{1+\Delta}{n}\right)\left(1-\frac{1+\delta}{n-1}\right)^{k}$$

推论 3 证毕。

定理 2　设 G 为一个 n 阶图 ($n \geqslant 2$), 若 Δ 和 δ 分别为其最大度和最小度，则有

$$\gamma(G) \leqslant \frac{n+\delta-\Delta+(n-1)\ln(1+\delta)}{1+\delta}$$

证明　由于不等式 $1+x \leqslant e^{x}$ 对一切实数 x 成立，根据推论 2 及推论 3，取 $k=\frac{n-1}{1+\delta}\ln(1+\delta)$, 得知 $k \geqslant 0$, 从而有

$$\gamma(G) \leqslant k+1+n\left(1-\frac{1+\Delta}{n}\right)\left(1-\frac{1+\delta}{n-1}\right)^{k} \leqslant$$

$$k+1+n\left(1-\frac{1+\Delta}{n}\right)\cdot \exp\left[-\frac{1+\delta}{n-1}\right]^{k}=$$

$$\frac{n-1}{1+\delta}\ln(1+\delta)+1+(n-\Delta-1)\cdot\frac{1}{1+\delta}=$$

$$\frac{n+\delta-\Delta+(n-1)\ln(1+\delta)}{1+\delta}$$

至此，定理 2 证毕。

比较上述定理 2 与引理 1，由于

$$\frac{n+\delta-\Delta+(n-1)\ln(1+\delta)}{1+\delta}=$$

$$\frac{n}{1+\delta}(1+\ln(1+\delta))-\frac{\Delta-\delta+\ln(1+\delta)}{1+\delta}$$

且 $\frac{\Delta-\delta+\ln(1+\delta)}{1+\delta} \geqslant 0$, 此等式成立当且仅当 $\Delta=\delta=0$。因此，定理 2 所给出的上界一般都优于引理 1 给出的上界，仅当 $G=\overline{K_n}$ 为空图 ($\Delta=\delta=0$) 时两者相同。

通过比较引理 1 和引理 2 不难发现，当 $2 \geqslant \delta \geqslant 0$ 时，引理 2 优于引理 1，且文献［2，6］中给出了满足 $\delta=2$ 且 $\gamma(G)=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ 的所有 n 阶连通图 G。

一个图 G 的围长 $g(G)$ 是指图 G 中最短圈的长度，若 G 为一个无圈图（森林），则定义其围长为无穷大。

定理 3　设 G 为一个 n 阶图 ($n \geqslant 3$), 若其最小度 $\delta \geqslant 2$ 且 $g(G) \geqslant 5$, 则有

$$\gamma(G) \leqslant \delta-1+\frac{n}{2}\left(1-\frac{1+\Delta}{n}\right)\left(1-\frac{1+\delta}{n-1}\right)\cdot$$

$$\left(1-\frac{1+\delta}{n-2}\right)\cdots\left(1-\frac{1+\delta}{n-\delta+2}\right)$$

证明　与定理 1 的证明完全一样地得到 U_{k+1} 和 S_{k+1}。注意到

$$U_{k+1}=V(G)-N[v_1]-N[v_2]-$$
$$N[v_3]-\cdots-N[v_{k+1}]$$

对于任意点 $v \in U_{k+1}$, 对于每个 $j(j=1,2,\cdots,k+1)$, v 点与 $N[v_j]$ 中至多一个点相邻接（否则，G 中存在长度为 4 的圈，这与 $g(G) \geqslant 5$ 相矛盾）。

令 $k=\delta-2 \geqslant 0$, 且 $H=G[U_{k+1}]$ 为 U_{k+1} 在 G 中的导出子图。由于每个点 $v \in U_{k+1}$ 与 $N[v_j]$ 中至多一个点相邻接 ($j=1,2,\cdots,k+1$), 故 v 点与 U_{k+1} 之外的至多 $k+1=\delta-1$ 个点相邻，从而 v 点与 U_{k+1} 内的至少一个点相邻接。即有 $\delta(H) \geqslant 1$。由引理 2 知 $\gamma(G) \leqslant \frac{|U_{k+1}|}{2}$。

取图 H 的一个最小控制集 D_{k+1}, 即有 $|D_{k+1}| \leqslant \frac{1}{2}|U_{k+1}|$。令 $D=S_{k+1} \cup D_{k+1}$, 可见 D 为图 G 的一个控制集。注意到 $k=\delta-2$, 且由定理 1 证明中知

$$|U_{k+1}| \leqslant n\left(1-\frac{1+\Delta}{n}\right)\cdot$$

$$\left(1-\frac{1+\delta}{n-1}\right)\left(1-\frac{1+\delta}{n-2}\right)\cdots\left(1-\frac{1+\delta}{n-k}\right)$$

从而有

$$\gamma(G) \leqslant |D|=|S_{k+1}|+|D_{k+1}| \leqslant$$

$$k+1+\frac{1}{2}|U_{k+1}| \leqslant$$

$$k+1+\frac{n}{2}\left(1-\frac{1+\Delta}{n}\right)\left(1-\frac{1+\delta}{n-1}\right)\cdot$$

$$\left(1-\frac{1+\delta}{n-2}\right)\cdots\left(1-\frac{1+\delta}{n-k}\right)=$$

$$\delta-1+\frac{n}{2}\left(1-\frac{1+\Delta}{n}\right)\left(1-\frac{1+\delta}{n-1}\right)\cdot$$

$$\left(1-\frac{1+\delta}{n-2}\right)\cdots\left(1-\frac{1+\delta}{n-\delta+2}\right)$$

至此，定理 3 证毕。

参考文献：

［1］ BONDY J A, MURTY U S R. 图论及其应用［M］. 吴望名，等译. 上海：科学技术出版社，1984.

［2］ 徐保根. 图的控制理论［M］. 北京：科学出版社，2008.

［3］ HAYNES T W, HEDETNIEMI S T, SLATER P J. Domination in graphs［M］. New York：Marcel Dekker, Inc, 1998.

［4］ XU B G, COCKAYNE E J, HAYNES T W. Extremal graphs for inequalities involving domination parameters［J］. Discrete Math, 2000, 216：1－10.

［5］ ALON N, SPENCER J H. The probablistic method［M］. John Wiley and Sons, Inc, 1992.

［6］ 徐保根. 图的控制与染色理论［M］. 武汉：华中科技大学出版社，2013.

［7］ 徐保根，康洪波，赵利芬，等. 图的圈符号控制数［J］. 中山大学学报：自然科学版，2013, 52(6)：136－138.

［8］ 徐保根，丁宗鹏. 图的 K－符号边控制数［J］. 数学的实践与认识，2013, 1：238－243.

［9］ XU B G, KONG X Y. On mixed minus domination in graphs［J］. J Oper Res Soc, China, 2013, 1(2)：385－391.